

## Filtre et Fourier

### **Introduction**

Thème:

On illustre la construction d'un signal triangulaire à partir de ses harmoniques et l'effet d'un filtre passe-bande du deuxième ordre sur ce signal.

### **Programme**

```
> restart;
> with(plots);
Warning, the name changecoords has been redefined
```

### **Construction du signal triangulaire d'entrée**

Le signal étudié est un triangle de fréquence  $f_e$ .

#### **première approche**

On décide d'écrire l'harmonique 1 de fréquence  $f_e$  sous la forme :  $1 * \cos(2*\pi*f_e*t)$ .

On sait que

- pour un signal triangulaire, il n'y a que des harmoniques impairs et ceux-ci décroissent en  $1/n^2$
- pour un signal carré, il n'y a que des harmoniques impairs et ceux-ci décroissent en  $1/n$

(donc il faut tenir compte d'un nombre bien plus important d'harmoniques pour décrire un signal carré)

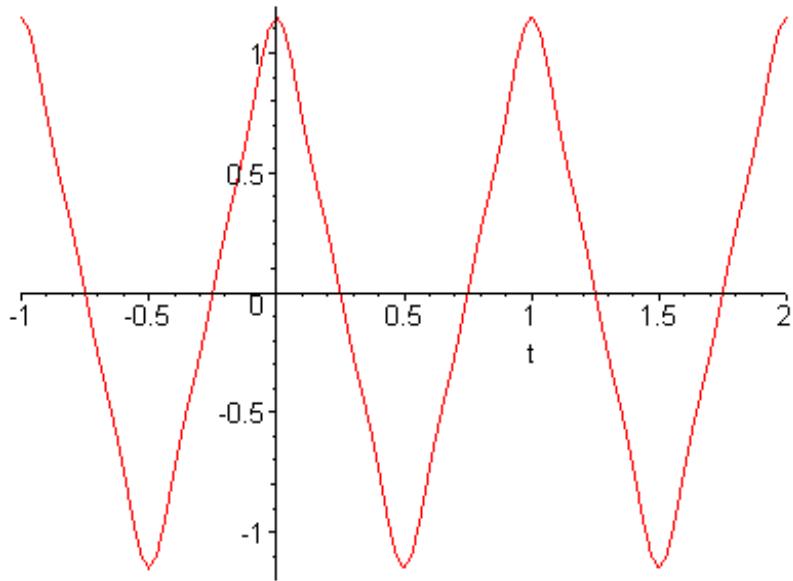
On écrit, en première approche, la tension d'entrée sous la forme d'une somme de 3 harmoniques non nuls.

```
> ve:=cos(2*\pi*f_e*t)+ 1/3^2*cos(2*3*\pi*f_e*t)+1/5^2*cos(2*5*\pi*f_e*t);
ve := cos(2 π fe t) + 1/9 cos(6 π fe t) + 1/25 cos(10 π fe t)
```

On trace le signal sur 3 périodes: une avant  $t = 0$  et 2 après  $t = 0$ .

On choisira un signal de fréquence numériquement égale à 1 en réalisant des substitutions avec subs .

```
> plot (subs(fe=1,ve),t=subs(fe=1,-1/fe)..subs(fe=1,2/fe));
```



**Conclusion:** cela ressemble déjà pas mal à un triangle

**On souhaite obtenir un triangle dont la valeur minimale soit 0 et dont la valeur maximale soit 1 (la composante continue ne sera donc pas nulle).**

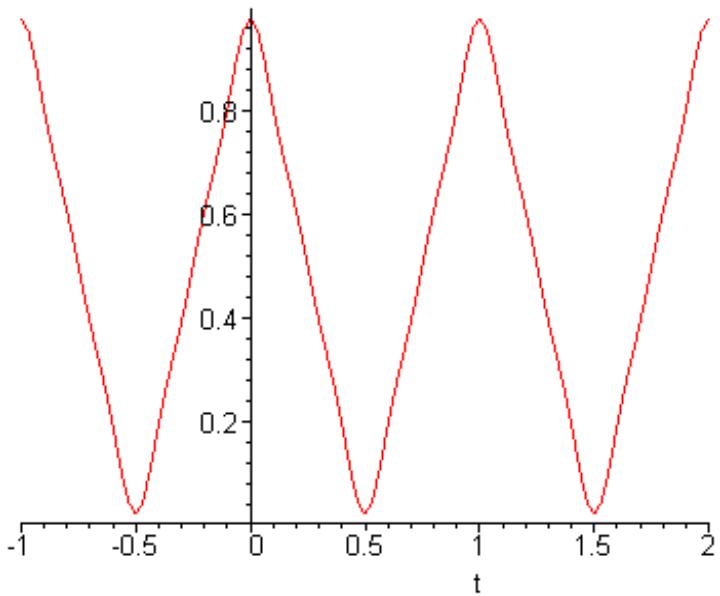
**Pour l'instant la valeur au sommet Vpointe semble environ égale à 1,2.  
On corrige alors l'expression de ve et on trace la courbe.**

```
> Vpointe:= 1.2 ;
```

$$Vpointe := 1.2$$

```
> ve:=1/2+1/(2*Vpointe)*(cos(2*Pi*fe*t)+ 1/3^2*cos(2*3*Pi*fe*t)+1/5^2*cos(2*5*Pi*fe*t));
ve :=  $\frac{1}{2} + .416666666 \cos(2 \pi fe t) + .04629629630 \cos(6 \pi fe t)$ 
+ .01666666666 \cos(10 \pi fe t)
```

```
> plot (subs(fe=1,ve),t=subs(fe=1,-1/fe)..subs(fe=1,2/fe));
```



Si on avait utilisé tous les harmoniques, on indique que le signal aurait atteint la valeur Vpointe=Pi^2 / 8 c'est-à-dire numériquement:

```
> evalf(Pi^2/8);
1.233700550
```

### **expression correcte**

On va désormais introduire une cinquantaine d'harmoniques non nuls ( en fait 51) et on utilise la donnée Pi^2 / 8 précédente

```
> Vpointe:= Pi^2/8 ;
Vpointe :=  $\frac{1}{8}\pi^2$ 

> ve:=1/2+1/(2*Vpointe)*sum(1/(2*i+1)^2*cos(2*Pi*(2*i+1)*fe*t),i=0..50);
ve :=  $\frac{1}{2} + 4 \left( \frac{1}{81} \cos(18\pi fe t) + \frac{1}{121} \cos(22\pi fe t) + \frac{1}{169} \cos(26\pi fe t) \right.$ 
 $+ \frac{1}{225} \cos(30\pi fe t) + \frac{1}{289} \cos(34\pi fe t) + \frac{1}{361} \cos(38\pi fe t) + \frac{1}{441} \cos(42\pi fe t)$ 
 $+ \frac{1}{529} \cos(46\pi fe t) + \frac{1}{1225} \cos(70\pi fe t) + \frac{1}{7225} \cos(170\pi fe t)$ 
 $+ \frac{1}{8281} \cos(182\pi fe t) + \frac{1}{49} \cos(14\pi fe t) + \frac{1}{3249} \cos(114\pi fe t)$ 
```

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3025} \cos(110 \pi fe t) + \frac{1}{2601} \cos(102 \pi fe t) + \frac{1}{2809} \cos(106 \pi fe t) \\
& + \frac{1}{2025} \cos(90 \pi fe t) + \frac{1}{2209} \cos(94 \pi fe t) + \frac{1}{2401} \cos(98 \pi fe t) \\
& + \frac{1}{1849} \cos(86 \pi fe t) + \frac{1}{1681} \cos(82 \pi fe t) + \frac{1}{1369} \cos(74 \pi fe t) \\
& + \frac{1}{1521} \cos(78 \pi fe t) + \frac{1}{961} \cos(62 \pi fe t) + \frac{1}{1089} \cos(66 \pi fe t) \\
& + \frac{1}{841} \cos(58 \pi fe t) + \frac{1}{729} \cos(54 \pi fe t) + \frac{1}{625} \cos(50 \pi fe t) \\
& + \frac{1}{7569} \cos(174 \pi fe t) + \frac{1}{7921} \cos(178 \pi fe t) + \frac{1}{6889} \cos(166 \pi fe t) \\
& + \frac{1}{5929} \cos(154 \pi fe t) + \frac{1}{6241} \cos(158 \pi fe t) + \frac{1}{6561} \cos(162 \pi fe t) \\
& + \frac{1}{5329} \cos(146 \pi fe t) + \frac{1}{5625} \cos(150 \pi fe t) + \frac{1}{5041} \cos(142 \pi fe t) \\
& + \frac{1}{4761} \cos(138 \pi fe t) + \frac{1}{3481} \cos(118 \pi fe t) + \frac{1}{3721} \cos(122 \pi fe t) \\
& + \frac{1}{3969} \cos(126 \pi fe t) + \frac{1}{4225} \cos(130 \pi fe t) + \frac{1}{4489} \cos(134 \pi fe t) \\
& + \frac{1}{8649} \cos(186 \pi fe t) + \frac{1}{9025} \cos(190 \pi fe t) + \frac{1}{9409} \cos(194 \pi fe t) \\
& + \frac{1}{9801} \cos(198 \pi fe t) + \frac{1}{10201} \cos(202 \pi fe t) + \frac{1}{25} \cos(10 \pi fe t) \\
& + \frac{1}{9} \cos(6 \pi fe t) + \cos(2 \pi fe t) \Big) / \pi^2
\end{aligned}$$

**On préfère travailler en complexe car cela sera plus pratique pour utiliser la fonction de transfert par la suite.**

> **ve:=1/2+1/(2\*Vpointe)\*sum(1/(2\*i+1)^2\*exp(I\*(2\*Pi\*(2\*i+1)\*fe\*t)),i=0..50);**

$$\begin{aligned}
ve := & \frac{1}{2} + 4 \left( \frac{1}{5329} e^{(146 I \pi fe t)} + \frac{1}{5625} e^{(150 I \pi fe t)} + \frac{1}{5041} e^{(142 I \pi fe t)} + \frac{1}{361} e^{(38 I \pi fe t)} \right. \\
& + \frac{1}{841} e^{(58 I \pi fe t)} + \frac{1}{9} e^{(6 I \pi fe t)} + \frac{1}{5929} e^{(154 I \pi fe t)} + e^{(2 I \pi fe t)} + \frac{1}{961} e^{(62 I \pi fe t)} \\
& + \frac{1}{8281} e^{(182 I \pi fe t)} + \frac{1}{8649} e^{(186 I \pi fe t)} + \frac{1}{1225} e^{(70 I \pi fe t)} + \frac{1}{7921} e^{(178 I \pi fe t)} \\
& + \frac{1}{4761} e^{(138 I \pi fe t)} + \frac{1}{7225} e^{(170 I \pi fe t)} + \frac{1}{6889} e^{(166 I \pi fe t)} + \frac{1}{6561} e^{(162 I \pi fe t)} \\
& + \frac{1}{1089} e^{(66 I \pi fe t)} + \frac{1}{6241} e^{(158 I \pi fe t)} + \frac{1}{1369} e^{(74 I \pi fe t)} + \frac{1}{10201} e^{(202 I \pi fe t)} \\
& + \frac{1}{9409} e^{(194 I \pi fe t)} + \frac{1}{9801} e^{(198 I \pi fe t)} + \frac{1}{9025} e^{(190 I \pi fe t)} + \frac{1}{441} e^{(42 I \pi fe t)} \\
& + \frac{1}{1681} e^{(82 I \pi fe t)} + \frac{1}{1521} e^{(78 I \pi fe t)} + \frac{1}{7569} e^{(174 I \pi fe t)} + \frac{1}{1849} e^{(86 I \pi fe t)} \\
& + \frac{1}{2025} e^{(90 I \pi fe t)} + \frac{1}{2209} e^{(94 I \pi fe t)} + \frac{1}{2401} e^{(98 I \pi fe t)} + \frac{1}{529} e^{(46 I \pi fe t)} \\
& + \frac{1}{121} e^{(22 I \pi fe t)} + \frac{1}{2601} e^{(102 I \pi fe t)} + \frac{1}{3481} e^{(118 I \pi fe t)} + \frac{1}{3249} e^{(114 I \pi fe t)} \\
& + \frac{1}{625} e^{(50 I \pi fe t)} + \frac{1}{3025} e^{(110 I \pi fe t)} + \frac{1}{2809} e^{(106 I \pi fe t)} + \frac{1}{3721} e^{(122 I \pi fe t)} \\
& + \frac{1}{169} e^{(26 I \pi fe t)} + \frac{1}{3969} e^{(126 I \pi fe t)} + \frac{1}{25} e^{(10 I \pi fe t)} + \frac{1}{4225} e^{(130 I \pi fe t)} \\
& + \frac{1}{4489} e^{(134 I \pi fe t)} + \frac{1}{225} e^{(30 I \pi fe t)} + \frac{1}{289} e^{(34 I \pi fe t)} + \frac{1}{729} e^{(54 I \pi fe t)} + \frac{1}{49} e^{(14 I \pi fe t)} \\
& \left. + \frac{1}{81} e^{(18 I \pi fe t)} \right) / \pi^2
\end{aligned}$$

Pour tracer la courbe, il faut prendre la partie réelle. Voir: [Re](#).

Je pense que Maple se pose devant toute grandeur la question de savoir s'il s'agit de réel ou de complexe avant de voir que la valeur numérique attribuée à la grandeur en fait bien un réel.

On va éviter ce ralentissement en utilisant [evalc](#),

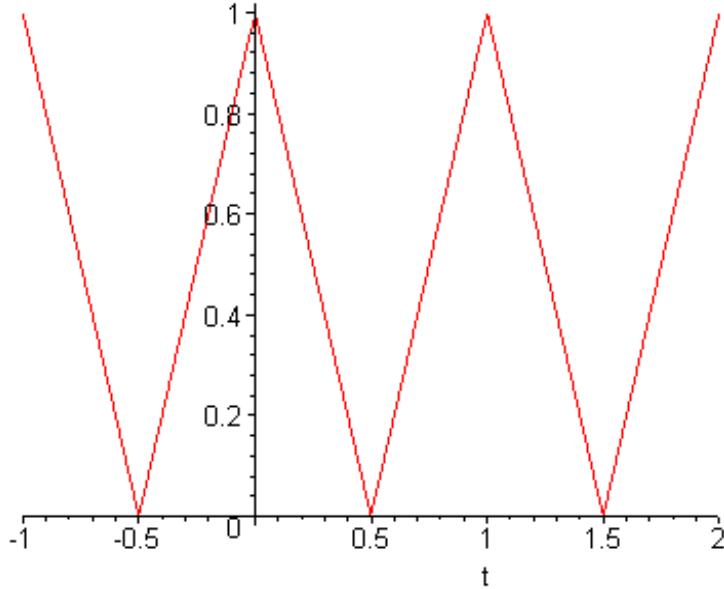
alors Maple considère que toute grandeur non définie est un réel.

Par exemple si on voulait calculer un module de complexe,  $\text{abs}(a+I*b)$  sera bien plus pénible que

**GP**

**evalc(abs(a+I\*b)).**

> plot (subs(fe=1,evalc(Re(ve))),t=subs(fe=1,-1/fe)..subs(fe=1,2/fe));



### **Fonction de transfert du filtre passe bande étudié**

On rappelle la fonction de transfert complexe H d'un passe bande d'ordre 2 en fonction de H0, f0, Q (coefficient de qualité), f ( fréquence du signal)

> **H:=f->H0/(1+I\*Q\*(f/f0-f0/f));**

$$H := f \rightarrow \frac{H_0}{1 + I Q \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)}$$

Comment cette fonction se comporte-t-elle si le montage dérive? On doit retrouver le ( $j\omega$ ) au numérateur.

Il suffit d'effacer deux termes dans le dénominateur en se plaçant en basse fréquence.

> **Hderive:=f->H0/(-I\*Q\*f0/f);**

$$H_{\text{derive}} := f \rightarrow \frac{I H_0 f}{Q f_0}$$

Comment cette fonction se comporte-t-elle si le montage intègre? On doit retrouver le ( $j\omega$ ) au dénominateur.

Il suffit d'effacer deux termes dans le dénominateur en se plaçant en haute fréquence.

> **Hintegre:=f->H0/(I\*Q\*f/f0);**

$$H_{\text{integre}} := f \rightarrow \frac{-I H_0 f_0}{Q f}$$

## Signal obtenu en sortie

On envoie dans le filtre le signal triangulaire.

Pour obtenir le signal de sortie, on utilise l'expression complexe du signal d'entrée et la fonction de transfert.  
Pour chaque harmonique,  
il faut prendre la bonne fonction de transfert.

Si l'harmonique a la fréquence  $f_n$ , il faut utiliser  $H(f_n)$

Maple envoie une erreur si l'on utilise  $H$  pour la fréquence zéro (division par zéro).

Le plus simple est d'écrire directement la valeur de  $H(0)$ .

$$\begin{aligned}
 > \text{ve} := 1/2 + 1/(2*V\text{pointe}) * \sum(1/(2*i+1)^2 * \exp(I*(2*Pi*(2*i+1)*fe*t)), i=0..50); \\
 > \text{vs} := 0 * 1/2 + 1/(2*V\text{pointe}) * \sum(1/(2*i+1)^2 * \exp(I*(2*Pi*(2*i+1)*fe*t)) * H((2*i+1)*fe), i=0..50); \\
 \text{vs} := 4 \left( \frac{1}{25} \frac{e^{(10I\pi fe t)} H_0}{1 + IQ \left( 5 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{5} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{3025} e^{(110I\pi fe t)} H_0}{1 + IQ \left( 55 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{55} \frac{f0}{fe} \right)} \right. \\
 + \frac{\frac{1}{5329} e^{(146I\pi fe t)} H_0}{1 + IQ \left( 73 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{73} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{9} e^{(6I\pi fe t)} H_0}{1 + IQ \left( 3 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{3} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{49} e^{(14I\pi fe t)} H_0}{1 + IQ \left( 7 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{7} \frac{f0}{fe} \right)} \\
 + \frac{\frac{1}{81} e^{(18I\pi fe t)} H_0}{1 + IQ \left( 9 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{9} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{121} e^{(22I\pi fe t)} H_0}{1 + IQ \left( 11 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{11} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{169} e^{(26I\pi fe t)} H_0}{1 + IQ \left( 13 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{13} \frac{f0}{fe} \right)} \\
 + \frac{\frac{1}{225} e^{(30I\pi fe t)} H_0}{1 + IQ \left( 15 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{15} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{289} e^{(34I\pi fe t)} H_0}{1 + IQ \left( 17 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{17} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{361} e^{(38I\pi fe t)} H_0}{1 + IQ \left( 19 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{19} \frac{f0}{fe} \right)} \\
 + \frac{\frac{1}{441} e^{(42I\pi fe t)} H_0}{1 + IQ \left( 21 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{21} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{529} e^{(46I\pi fe t)} H_0}{1 + IQ \left( 23 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{23} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{625} e^{(50I\pi fe t)} H_0}{1 + IQ \left( 25 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{25} \frac{f0}{fe} \right)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\frac{1}{841} e^{(58I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(29 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{29} \frac{f0}{fe}\right)} + \frac{\frac{1}{961} e^{(62I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(31 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{31} \frac{f0}{fe}\right)} + \frac{\frac{1}{1089} e^{(66I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(33 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{33} \frac{f0}{fe}\right)} \\
& + \frac{\frac{1}{1369} e^{(74I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(37 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{37} \frac{f0}{fe}\right)} + \frac{\frac{1}{1521} e^{(78I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(39 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{39} \frac{f0}{fe}\right)} + \frac{\frac{1}{1681} e^{(82I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(41 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{41} \frac{f0}{fe}\right)} \\
& + \frac{\frac{1}{2025} e^{(90I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(45 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{45} \frac{f0}{fe}\right)} + \frac{\frac{1}{2209} e^{(94I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(47 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{47} \frac{f0}{fe}\right)} + \frac{\frac{1}{2401} e^{(98I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(49 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{49} \frac{f0}{fe}\right)} \\
& + \frac{\frac{1}{2809} e^{(106I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(53 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{53} \frac{f0}{fe}\right)} + \frac{\frac{1}{3249} e^{(114I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(57 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{57} \frac{f0}{fe}\right)} + \frac{\frac{1}{3481} e^{(118I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(59 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{59} \frac{f0}{fe}\right)} \\
& + \frac{\frac{1}{3721} e^{(122I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(61 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{61} \frac{f0}{fe}\right)} + \frac{\frac{1}{3969} e^{(126I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(63 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{63} \frac{f0}{fe}\right)} + \frac{\frac{1}{4225} e^{(130I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(65 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{65} \frac{f0}{fe}\right)} \\
& + \frac{\frac{1}{1849} e^{(86I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(43 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{43} \frac{f0}{fe}\right)} + \frac{e^{(2I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(\frac{fe}{f0} - \frac{f0}{fe}\right)} + \frac{\frac{1}{5041} e^{(142I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(71 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{71} \frac{f0}{fe}\right)} \\
& + \frac{\frac{1}{4489} e^{(134I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(67 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{67} \frac{f0}{fe}\right)} + \frac{\frac{1}{5625} e^{(150I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(75 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{75} \frac{f0}{fe}\right)} + \frac{\frac{1}{5929} e^{(154I\pi fe t)} H0}{1 + I Q\left(77 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{77} \frac{f0}{fe}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\frac{1}{6241} e^{(158I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 79 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{79} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{6561} e^{(162I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 81 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{81} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{6889} e^{(166I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 83 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{83} \frac{f0}{fe} \right)} \\
 \\ 
 & + \frac{\frac{1}{7225} e^{(170I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 85 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{85} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{7569} e^{(174I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 87 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{87} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{7921} e^{(178I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 89 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{89} \frac{f0}{fe} \right)} \\
 \\ 
 & + \frac{\frac{1}{8281} e^{(182I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 91 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{91} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{8649} e^{(186I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 93 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{93} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{9025} e^{(190I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 95 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{95} \frac{f0}{fe} \right)} \\
 \\ 
 & + \frac{\frac{1}{9409} e^{(194I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 97 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{97} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{9801} e^{(198I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 99 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{99} \frac{f0}{fe} \right)} \\
 \\ 
 & + \frac{\frac{1}{10201} e^{(202I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 101 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{101} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{4761} e^{(138I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 69 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{69} \frac{f0}{fe} \right)} \\
 \\ 
 & + \frac{\frac{1}{2601} e^{(102I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 51 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{51} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{1225} e^{(70I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 35 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{35} \frac{f0}{fe} \right)} + \frac{\frac{1}{729} e^{(54I\pi fe t)} H0}{1 + I Q \left( 27 \frac{fe}{f0} - \frac{1}{27} \frac{f0}{fe} \right)} \Bigg) \\
 & / \pi^2
 \end{aligned}$$

### Tracé du signal de sortie pour différentes fréquences

**fe=f0**

premier cas: f0=1 ( pour toute la suite) et fe=1 ( on prend Q=10 et H0=50 pour toute la suite )

> **Q:=10; H0:=50; f0:=1;**

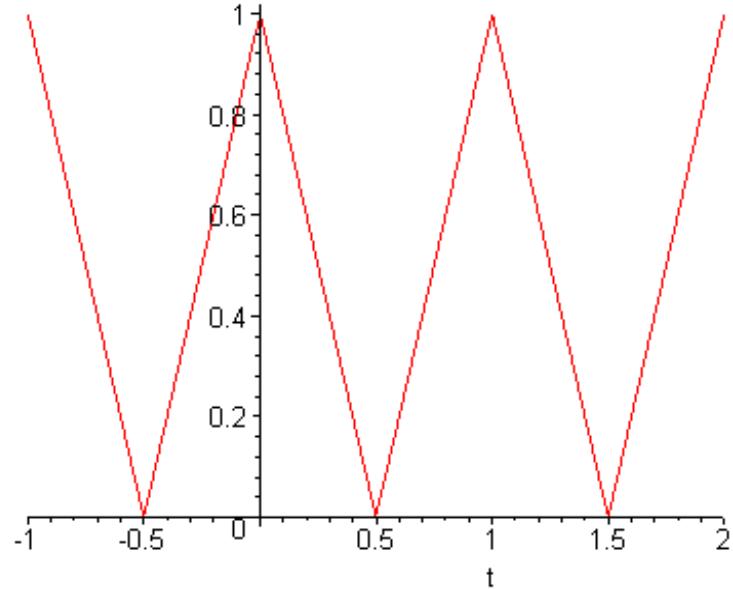
$$Q := 10$$

$H0 := 50$ 
 $f0 := 1$ 

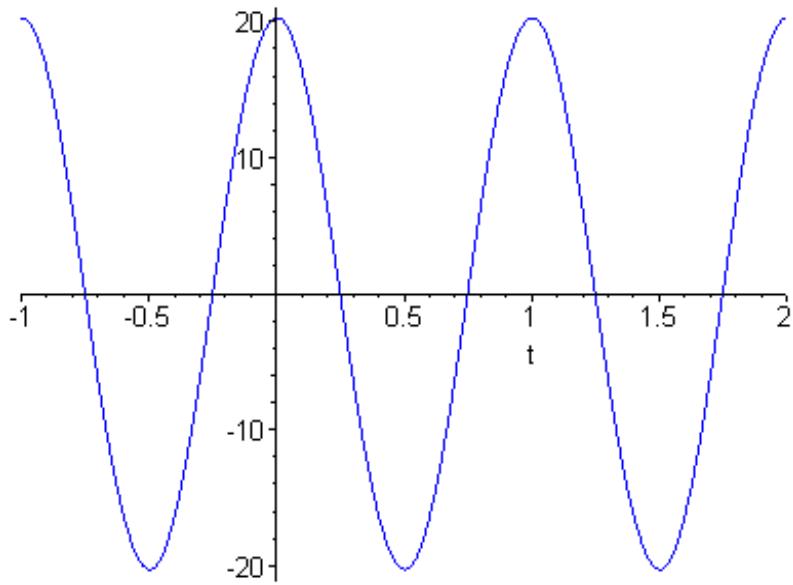
On stocke les graphes pour pouvoir les tracer ensemble.

On trace l'entrée en rouge et la sortie en bleu.

```
> E1:=plot (subs(fe=1,evalc(Re(ve))),t=subs(fe=1,-1/fe)..subs(fe=1,2/fe),color=red);
E1;
```

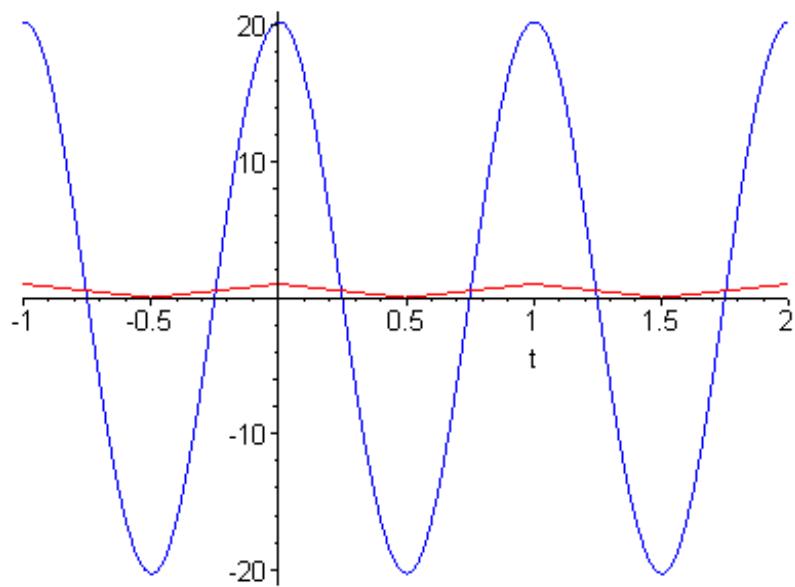


```
> S1:=plot (subs(fe=1,evalc(Re(vs))),t=subs(fe=1,-1/fe)..subs(fe=1,2/fe),color=blue);
S1;
```



les deux:

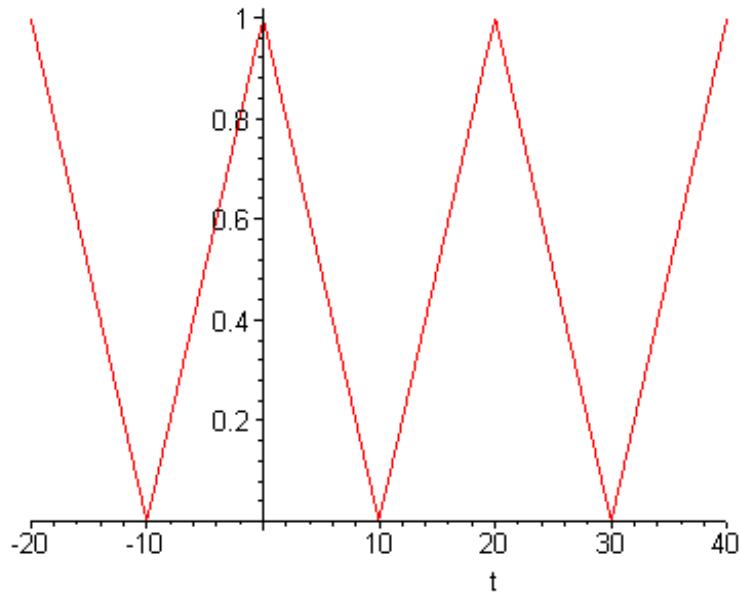
```
> display([E1,S1]);
```



**fe=f0/20**

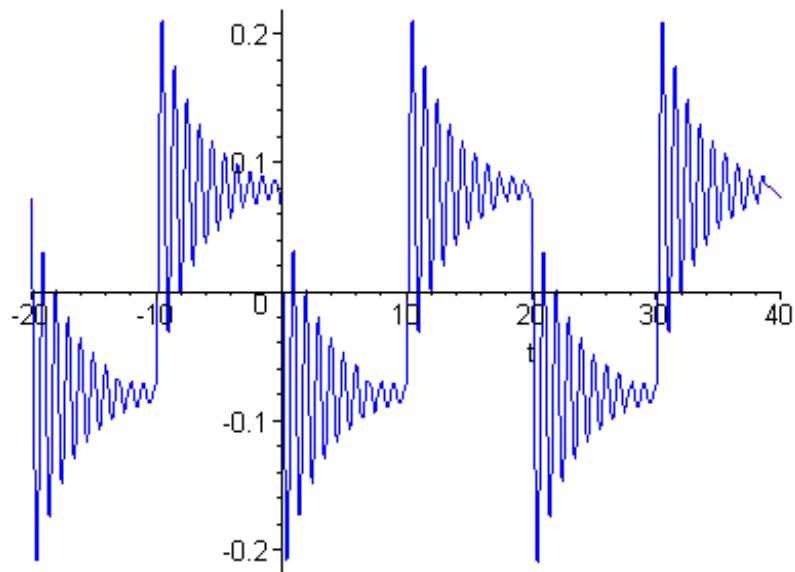
deuxième cas cas: f0=1 et fe=1/20

```
> E2:=plot (subs(fe=1/20,evalc(Re(ve))),t=subs(fe=1/20,-1/fe)..subs(fe=1/20,2/fe),color=red):
E2;
```



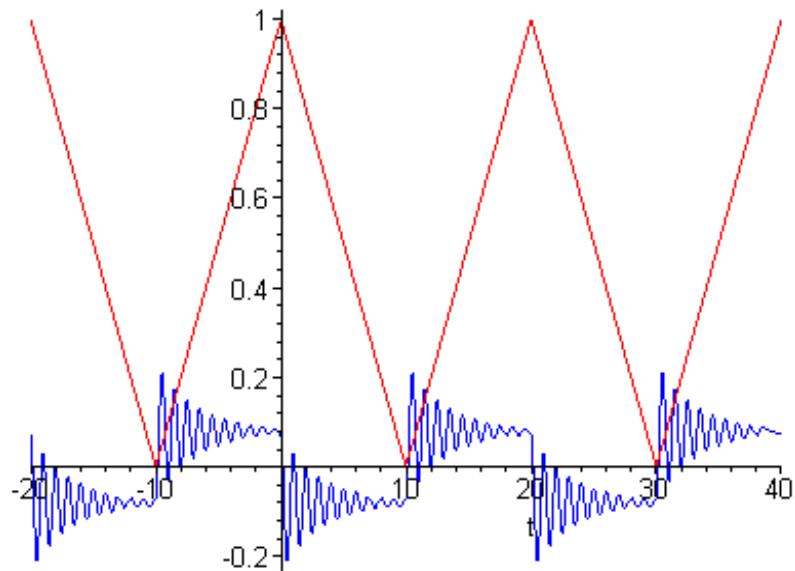
```
> S2:=plot (subs(fe=1/20,evalc(Re(vs))),t=subs(fe=1/20,-1/fe)..subs(fe=1/20,2/fe),color=blue):
S2;
```

**GP**



**les deux:**

> **display([E2,S2]);**

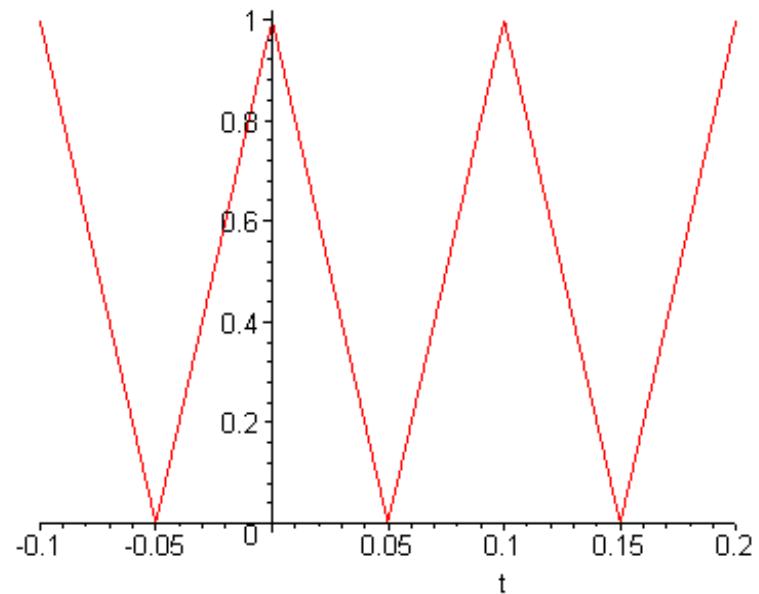


**fe=10\*f0**

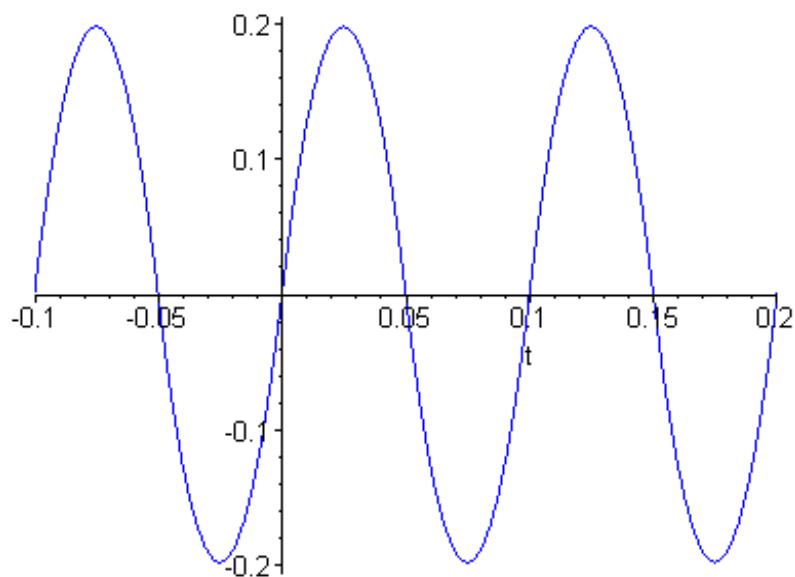
**troisième cas cas: f0=1 et fe=10**

> **E3:=plot (subs(fe=10,evalc(Re(ve))),t=subs(fe=10,-1/fe)..subs(fe=10,2/fe),color=red);  
E3;**

**GP**

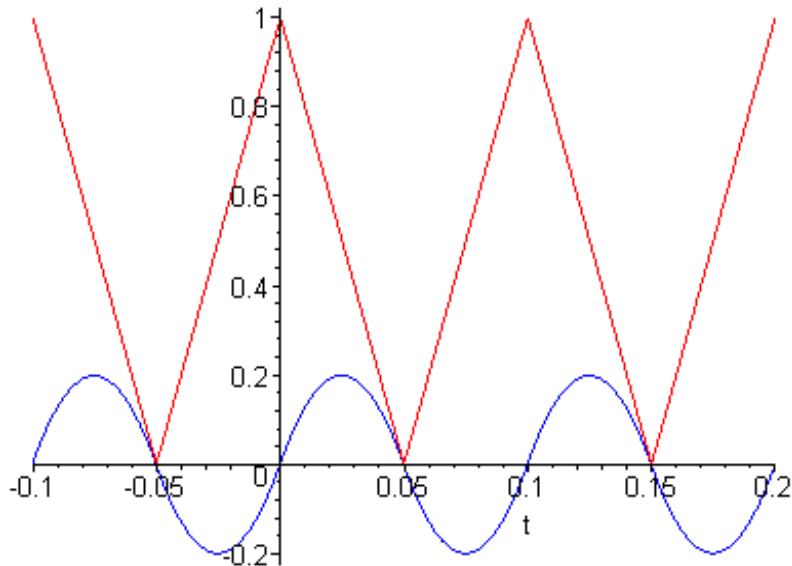


```
> S3:=plot (subs(fe=10,evalc(Re(vs))),t=subs(fe=10,-1/fe)..subs(fe=10,2/fe),color=blue):  
S3;
```



**les deux:**

```
> display([E3,S3]);
```



### La suite...

On veut interpréter l'allure des signaux de sortie

- qu'est devenue la composante continue?
- la partie alternative est-elle intégrée, dérivée, ou simplement filtrée, ou y a-t-il résonance?

**fe=f0**

Dans ce cas, on peut supposer que ( cf coefficient de qualité assez élevé et passe bande centré sur f0) le filtre ne sélectionne que l'harmonique de fréquence f0.

On rappelle l'expression de cet harmonique

> **harmonique1\_ve:=1/(2\*Vpointe)\*exp(I\*(2\*Pi\*fe\*t));**

$$\text{harmonique1\_ve} := 4 \frac{e^{(2I\pi fe t)}}{\pi^2}$$

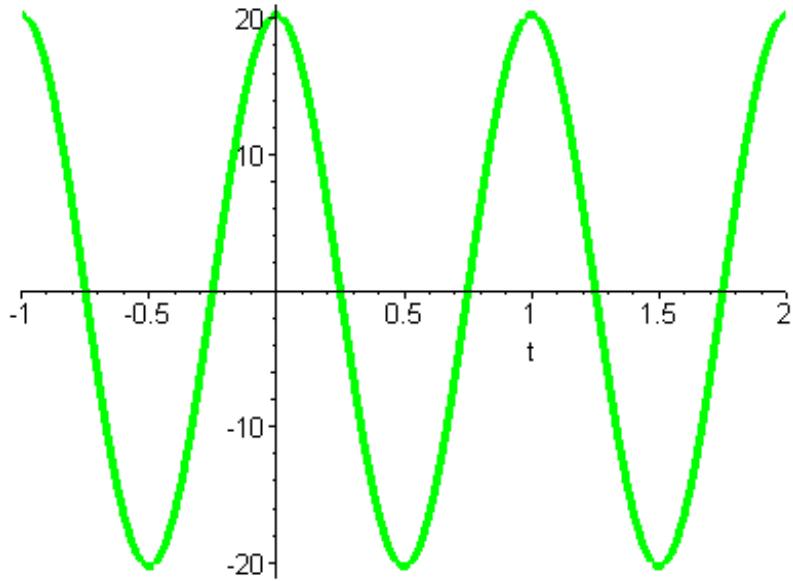
La tension de sortie, si on ne prenait en compte que ce seul harmonique, serait:

> **harmonique1\_vs:=1/(2\*Vpointe)\*exp(I\*(2\*Pi\*fe\*t))\*H(fe);**

$$\text{harmonique1\_vs} := 200 \frac{e^{(2I\pi fe t)}}{\pi^2 \left( 1 + 10 I \left( fe - \frac{1}{fe} \right) \right)}$$

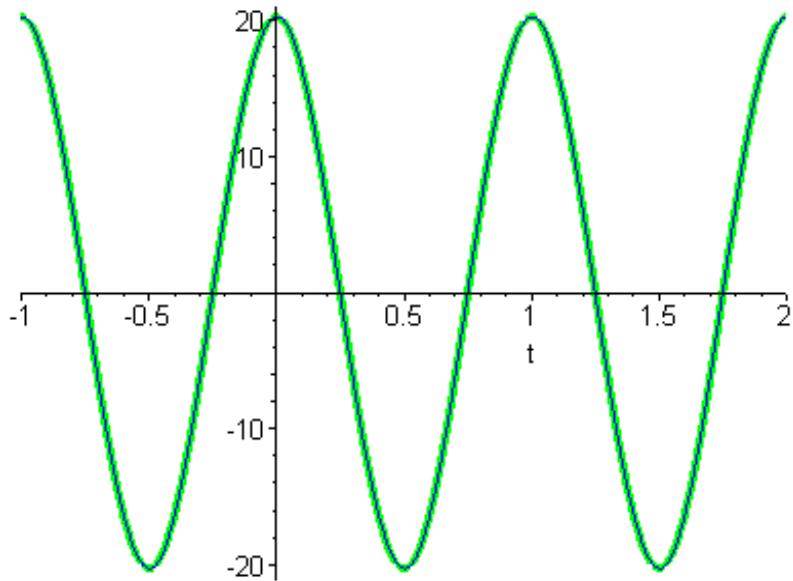
On trace cette tension de sortie en vert. L'option thickness=4 permet d'épaissir le trait.

```
> P1:=plot (subs(fe=1,evalc(Re(harmonique1_vs))),t=subs(fe=1,-1/fe)..subs(fe=1,2/fe),color=green,thickness=4):
P1;
```



On vérifie la qualité de l' hypothèse en traçant la proposition P1 et la vraie sortie S1 ensemble.

```
> display([S1,P1]);
```



A la précision du tracé, on ne voit pas beaucoup de différences. La supposition semble de bonne qualité.

**fe=f0/20**

Dans ce cas, on peut s'attendre à ce que le signal soit dérivé.

On rappelle:

> Hderive(f);

5 If

La réponse ps2 attendue dans le cadre de cette hypothèse serait donc en utilisant Hdérive:

> ps2:=0\*1/2+1/(2\*Vpointe)\*sum(1/(2\*i+1)^2\*exp(I\*(2\*Pi\*(2\*i+1)\*fe\*t))\*Hderive((2\*i+1)\*fe),i=0..50);

$$\begin{aligned} ps2 := 4 \left( \frac{5}{11} I e^{(22 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{9} I e^{(18 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{7} I e^{(14 I \pi fe t)} fe + I e^{(10 I \pi fe t)} fe \right. \\ \left. + \frac{5}{3} I e^{(6 I \pi fe t)} fe + 5 I e^{(2 I \pi fe t)} fe + \frac{1}{5} I e^{(50 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{23} I e^{(46 I \pi fe t)} fe \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. + \frac{5}{21} I e^{(42 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{19} I e^{(38 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{17} I e^{(34 I \pi fe t)} fe + \frac{1}{3} I e^{(30 I \pi fe t)} fe \right. \\ \left. + \frac{5}{13} I e^{(26 I \pi fe t)} fe + \frac{1}{9} I e^{(90 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{43} I e^{(86 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{41} I e^{(82 I \pi fe t)} fe \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. + \frac{5}{39} I e^{(78 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{37} I e^{(74 I \pi fe t)} fe + \frac{1}{7} I e^{(70 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{33} I e^{(66 I \pi fe t)} fe \right. \\ \left. + \frac{5}{31} I e^{(62 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{29} I e^{(58 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{27} I e^{(54 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{59} I e^{(118 I \pi fe t)} fe \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. + \frac{5}{57} I e^{(114 I \pi fe t)} fe + \frac{1}{11} I e^{(110 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{53} I e^{(106 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{51} I e^{(102 I \pi fe t)} fe \right. \\ \left. + \frac{5}{49} I e^{(98 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{47} I e^{(94 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{83} I e^{(166 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{81} I e^{(162 I \pi fe t)} fe \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. + \frac{5}{79} I e^{(158 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{77} I e^{(154 I \pi fe t)} fe + \frac{1}{15} I e^{(150 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{73} I e^{(146 I \pi fe t)} fe \right. \\ \left. + \frac{5}{71} I e^{(142 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{69} I e^{(138 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{67} I e^{(134 I \pi fe t)} fe + \frac{1}{13} I e^{(130 I \pi fe t)} fe \right. \end{aligned}$$

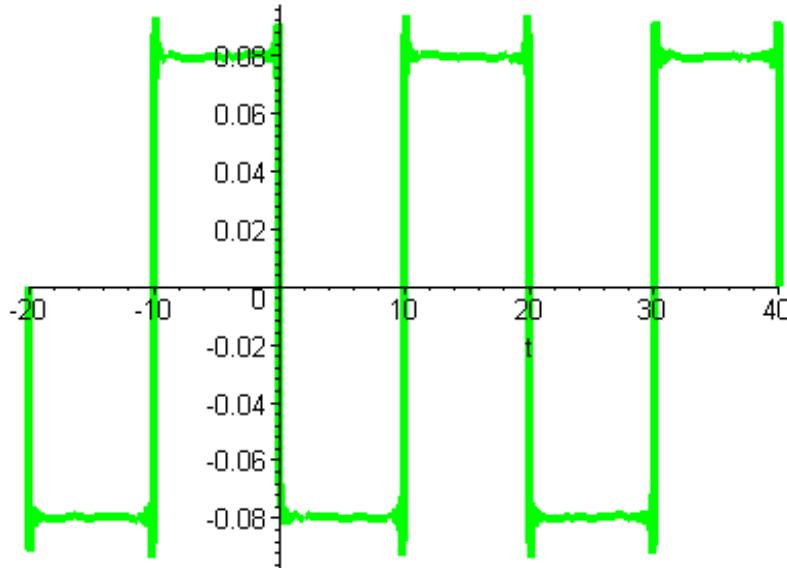
$$\begin{aligned} \left. + \frac{5}{63} I e^{(126 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{61} I e^{(122 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{93} I e^{(186 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{91} I e^{(182 I \pi fe t)} fe \right. \\ \left. + \frac{5}{89} I e^{(178 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{87} I e^{(174 I \pi fe t)} fe + \frac{1}{17} I e^{(170 I \pi fe t)} fe + \frac{5}{99} I e^{(198 I \pi fe t)} fe \right. \end{aligned}$$

**GP**

$$+ \frac{5}{97} I e^{(194 I \pi f_e t)} f_e + \frac{1}{19} I e^{(190 I \pi f_e t)} f_e + \frac{5}{101} I e^{(202 I \pi f_e t)} f_e \Big) / \pi^2$$

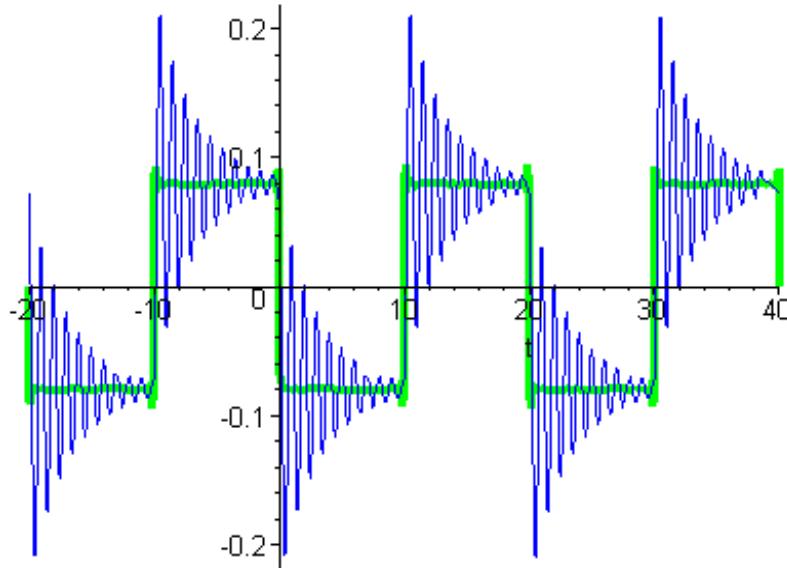
On trace cette tension de sortie en vert ( les imperfections observées sont dues ici au nombre limité d'harmoniques utilisés dans la construction des signaux ).

```
> P2:=plot (subs(fe=1/20,evalc(Re(ps2))),t=subs(fe=1/20,-1/fe)..subs(fe=1/20,2/fe),color=green,thickness=4);  
P2;
```



On vérifie la qualité de la proposition en traçant P2 et S2 ensemble

```
> display([S2,P2]);
```



La supposition n'est pas bonne. Les composantes de fréquences proches de  $f_0$  ne sont pas dérivées et provoquent de la résonance.

**fe=10\*f0**

Dans ce cas, on peut s'attendre à ce que le signal soit intégré.

On rappelle:

> **Hintegre(f);**

$$\frac{-5 I}{f}$$

En fait, au lieu d'utiliser ce Hsimplifié, dans le but de pousser la reflexion, on va utiliser pour trouver la fonction de sortie la fonction de Maple : int.

Du coup, on observera aussi le régime transitoire.

Ecrire alors la réponse proposée notée ps31 en faisant agir int ou diff sur ve.

(On a supposé que la constante d'intégration était nulle. Il faudrait réfléchir à cette question)

> **ps31:=int( ve,t);**

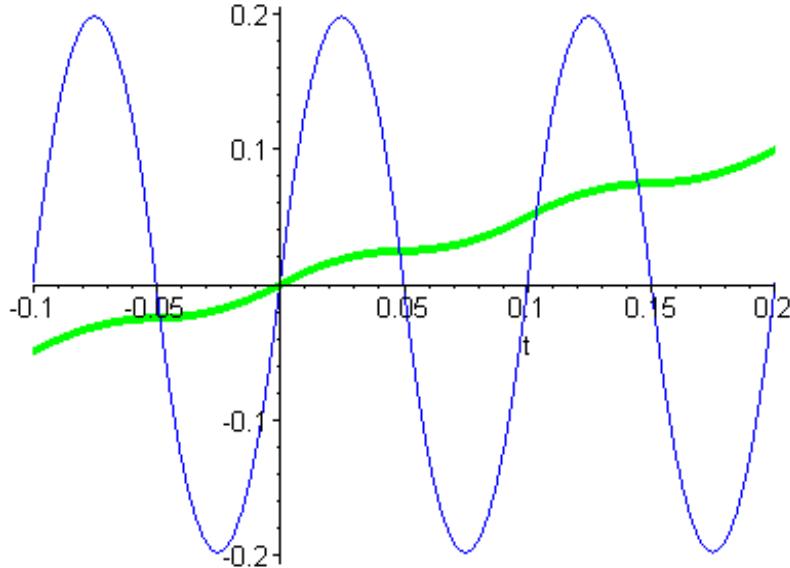
$$\begin{aligned} ps31 := & \frac{1}{2} t + 4 \left( -\frac{\frac{1}{778034} I e^{(146 I \pi fe t)}}{\pi fe} - \frac{\frac{1}{1062882} I e^{(162 I \pi fe t)}}{\pi fe} - \frac{\frac{1}{986078} I e^{(158 I \pi fe t)}}{\pi fe} \right. \\ & - \frac{\frac{1}{1409938} I e^{(178 I \pi fe t)}}{\pi fe} - \frac{\frac{1}{1143574} I e^{(166 I \pi fe t)}}{\pi fe} - \frac{\frac{1}{657018} I e^{(138 I \pi fe t)}}{\pi fe} \\ & - \frac{\frac{1}{1608714} I e^{(186 I \pi fe t)}}{\pi fe} - \frac{\frac{1}{1228250} I e^{(170 I \pi fe t)}}{\pi fe} - \frac{\frac{1}{686} I e^{(14 I \pi fe t)}}{\pi fe} \\ & - \frac{\frac{1}{85750} I e^{(70 I \pi fe t)}}{\pi fe} - \frac{\frac{1}{118638} I e^{(78 I \pi fe t)}}{\pi fe} - \frac{\frac{1}{913066} I e^{(154 I \pi fe t)}}{\pi fe} \\ & - \frac{\frac{1}{4394} I e^{(26 I \pi fe t)}}{\pi fe} - \frac{\frac{1}{182250} I e^{(90 I \pi fe t)}}{\pi fe} - \frac{\frac{1}{1714750} I e^{(190 I \pi fe t)}}{\pi fe} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\frac{1}{1317006} I e^{(174 I \pi fe t)} - \frac{1}{54} I e^{(6 I \pi fe t)} - \frac{1}{18522} I e^{(42 I \pi fe t)} - \frac{1}{48778} I e^{(58 I \pi fe t)}}{\pi fe} \\
& - \frac{\frac{1}{13718} I e^{(38 I \pi fe t)} - \frac{1}{1825346} I e^{(194 I \pi fe t)} - \frac{1}{1940598} I e^{(198 I \pi fe t)}}{\pi fe} \\
& - \frac{\frac{1}{843750} I e^{(150 I \pi fe t)} - \frac{1}{715822} I e^{(142 I \pi fe t)} - \frac{1}{2060602} I e^{(202 I \pi fe t)}}{\pi fe} \\
& - \frac{\frac{1}{71874} I e^{(66 I \pi fe t)} - \frac{1}{297754} I e^{(106 I \pi fe t)} - \frac{1}{101306} I e^{(74 I \pi fe t)}}{\pi fe} \\
& - \frac{\frac{1}{207646} I e^{(94 I \pi fe t)} - \frac{1}{1507142} I e^{(182 I \pi fe t)} - \frac{1}{1458} I e^{(18 I \pi fe t)}}{\pi fe} \\
& - \frac{\frac{1}{6750} I e^{(30 I \pi fe t)} - \frac{1}{332750} I e^{(110 I \pi fe t)} - \frac{1}{39366} I e^{(54 I \pi fe t)}}{\pi fe} \\
& - \frac{\frac{1}{137842} I e^{(82 I \pi fe t)} - \frac{1}{9826} I e^{(34 I \pi fe t)} - \frac{1}{549250} I e^{(130 I \pi fe t)}}{\pi fe} \\
& - \frac{\frac{1}{59582} I e^{(62 I \pi fe t)} - \frac{1}{601526} I e^{(134 I \pi fe t)} - \frac{1}{31250} I e^{(50 I \pi fe t)}}{\pi fe} \\
& - \frac{\frac{1}{500094} I e^{(126 I \pi fe t)} - \frac{1}{370386} I e^{(114 I \pi fe t)} - \frac{1}{250} I e^{(10 I \pi fe t)} - \frac{1}{2662} I e^{(22 I \pi fe t)}}{\pi fe} \\
& - \frac{\frac{1}{410758} I e^{(118 I \pi fe t)} - \frac{1}{265302} I e^{(102 I \pi fe t)} - \frac{1}{235298} I e^{(98 I \pi fe t)}}{\pi fe}
\end{aligned}$$

$$\left. \left( -\frac{\frac{1}{24334} I e^{(46 I \pi f_e t)} - \frac{1}{2} I e^{(2 I \pi f_e t)} - \frac{1}{159014} I e^{(86 I \pi f_e t)} - \frac{1}{453962} I e^{(122 I \pi f_e t)}}{\pi f_e} \right) \right/ \pi^2$$

On trace P31 (gros trait vert) et S3 (en bleu) sur le même graphe

```
> P31:=plot (subs(fe=10,evalc(Re(ps31))),t=subs(fe=10,-1/fe)..subs(fe=10,2/fe),color=green,thickness=4):
display([S3,P31]);
```



Deux difficultés apparaissent.

-un phénomène de dérive de la tension de sortie supposée

-un problème d'amplitude: l'amplitude de la tension alternative obtenue est trop faible

On se propose de résoudre la première difficulté.

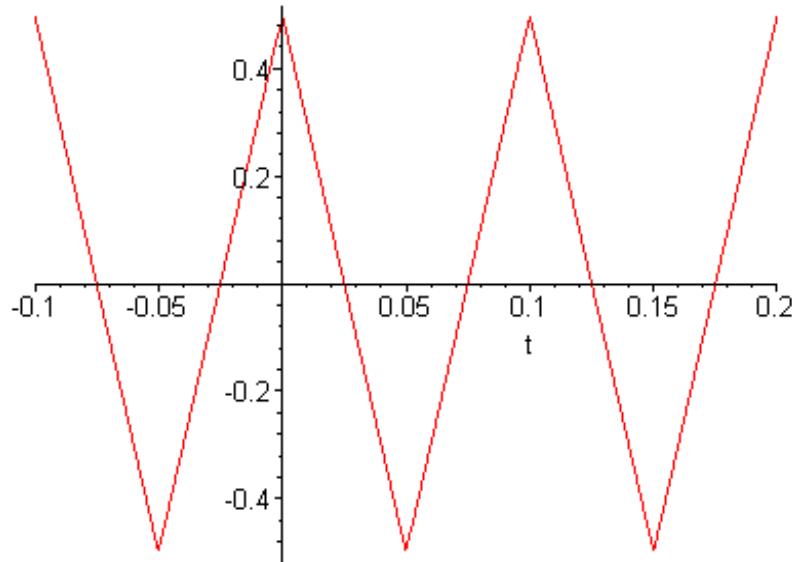
On désigne par ve\_alt la partie alternative du signal d'entrée.

La fonction de transfert permettait de prévoir l'utilisation de ve\_alt uniquement puisque le continu ne passe pas (il n'est pas intégré)

```
> ve_alt:=1/(2*Vpointe)*sum(1/(2*i+1)^2*exp(I*(2*Pi*(2*i+1)*fe*t)),i=0..50):
```

Seule ve\_alt est intégré. Le graphe de ve\_alt est noté E3\_alt

```
> E3_alt:=plot (subs(fe=10,evalc(Re(ve_alt))),t=subs(fe=10,-1/fe)..subs(fe=10,2/fe),color=red):
E3_alt;
```

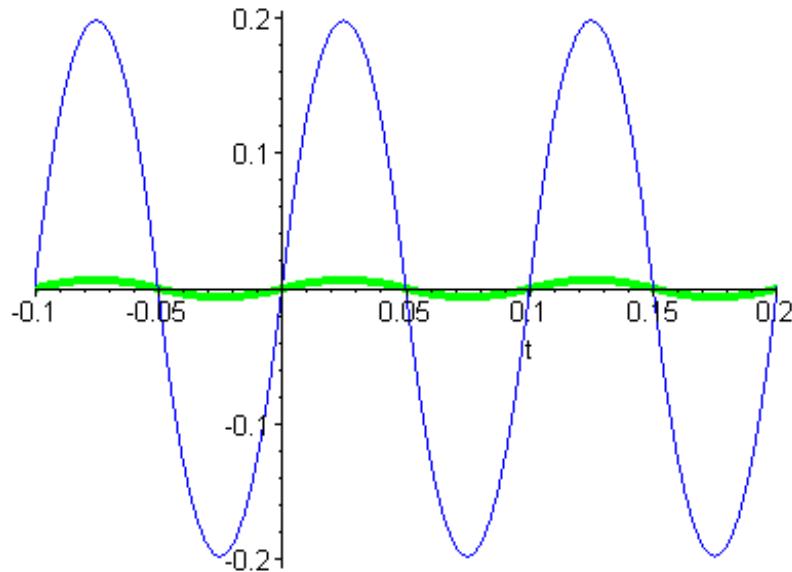


L'amplitude du signal de sortie quand on intègre cf (base \* hauteur /2) doit donc être de l'ordre de  $0.05 \times 0.5 / 2 = 0.0125$  V.

Le signal de sortie (cf intégration de triangles) n'est ni un sinus, ni un cosinus mais une suite d'arcs de paraboles.

On écrit le nouveau ps32 ( intégrale de la partie alternative de l'entrée) et on trace le nouveau P32 et S3 sur le même graphe

```
> ps32:=int( ve_alt,t);
P32:=plot (subs(fe=10,evalc(Re(ps32))),t=subs(fe=10,-1/fe)..subs(fe=10,2/fe),color=green,thickness=4);
display([S3,P32]);
```

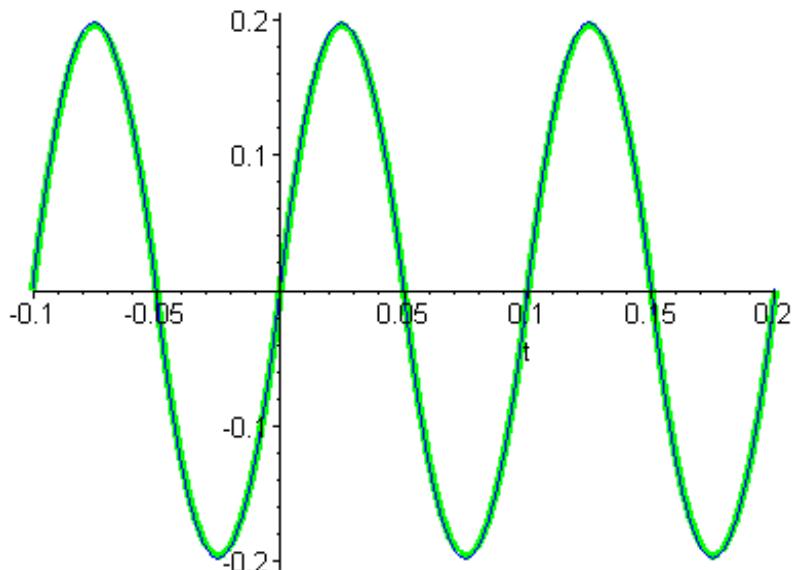


Enfin, on corrige le deuxième problème.

Pour trouver le coefficient multiplicateur, il suffit de regarder Hintegre(f);

On écrit le ps33 correct et on trace le bon P33 et S3 sur le même graphe

```
> ps33:=5*2*Pi*int( ve_alt,t):
P33:=plot (subs(fe=10,evalc(Re(ps33))),t=subs(fe=10,-1/fe)..subs(fe=10,2/fe),color=green,thickness=4):
display([S3,P33]);
```



>

Ne pas confondre  $j^*\omega$  et  $j^*f$ ... il y a un  $2\pi$  de différence.

**FIN**